TD 1 : RAPPELS D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES

Rappels

Exercise 1 *Sur les M-matrices*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite positive[1] si $m_{ij} \geq 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Une telle matrice sera notée (par abus de notation) $M \geq 0$. Une matrice M sera alors dite monotone ou *M-matrice* si M is inversible et $M^{-1} \geq 0$.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

a) M est une M-matrice ;

b) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $Mx \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$;

c) toutes les valeurs propres de M ont une partie réelle positive ;

d) tous les mineurs principaux de M strictement positifs ;

e) Il existe une matrice diagonale D à coefficients strictement positifs telle que $MD\mathbf{e} > 0$, où $\mathbf{e}$ est le vecteur composé uniquement de 1.

Exercise 2 *Schéma d'Euler*

Soit le problème de Cauchy

$$y''(t) + ty'(t) + (1+t)y(t) = t^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

a) Transformer cette EDO en un système différentiel du premier ordre équivalent.

b) Effectuer deux étapes du schéma d'Euler explicite avec un pas $h = 1/2$. Déterminer les approximations de y, y' et y'' aux points $t_1 = 1/2$ et $t_2 = 1$.

1. Attention, c'est une notion totalement différente de matrice *définie* positive !

Exercise 3 *EDOs sans Cauchy-Lipschitz*

Soit l'EDO

$$y'(t) = \sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 0.$$

a) Trouver une solution à cette EDO autre que la solution triviale $y \equiv 0$.

b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'unicité d'une solution. Quelle hypothèse du théorème n'est pas satisfaite ici ?

c) Écrire le schéma d'Euler explicite (à pas h constant), et déterminer la solution obtenue par ce schéma.

d) Écrire le schéma d'Euler implicite (à pas h constant), et en effectuer les deux premières étapes.

e) Montrer que pour une condition initiale $y(0) > 0$ la solution est unique. Décrire les solutions maximales dans ce cas.

f) Comment peut-on essayer d'approcher ces solutions maximales avec les schémas d'Euler (explicite et implicite) ? Que risque-t-il de se passer pour $t_n \to -\infty$ pour l'un de ces deux schémas ?

Exercise 4 *Méthodes implicites*

Soit l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t), \quad t \in [0,T], \quad T < 1, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

a) Donner la solution de l'équation différentielle (dont on supposera l'unicité).

b) On choisit, pour la résolution de (1), le **schéma d'Euler implicite** à pas variable :

$$y_{n+1} = y_n + h_n\, f(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{2}$$

(1) Donner l'équation du second degré vérifiée par y_{n+1} correspondant à l'utilisation du schéma (2) pour la résolution de (1).

(2) Donner la restriction sur le pas de temps h_n en fonction de y_n à vérifier afin que cette équation admette deux racines réelles.

(3) Exprimer alors explicitement y_{n+1} en fonction de y_n et de h_n. Encadrer y_{n+1} en fonction de h_n et déterminer le réel a tel que l'on ait $\quad y_{n+1} > a y_n \quad$.

(4) Quel phénomène peut-on craindre si T est trop proche de 1 ?

c) On choisit désormais pour la résolution de (1), le **schéma de Crank-Nicolson** à pas variable :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right]. \tag{3}$$

(1) Donner l'équation du second degré vérifiée par y_{n+1} correspondant à l'utilisation du schéma (3) pour la résolution de (1).

(2) Donner la restriction sur le pas de temps h_n en fonction de y_n à vérifier afin que cette équation admette deux racines réelles.

(3) Exprimer alors explicitement y_{n+1} en fonction de y_n et de h_n. Encadrer y_{n+1} en fonction de h_n et déterminer le réel b tel que l'on ait $\quad y_{n+1} > by_n \quad$.

(4) Quel phénomène peut-on craindre si T est trop proche de 1 ?

Méthode des différences finies

Exercise 5 *Intégration explicite*

Considérons l'équation suivante

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où la fonction u est l'inconnue du problème et $f \in C^0([0,1])$ est une fonction donnée.

1. Montrer que ce problème admet une solution u et qu'elle vaut nécessairement

$$u(x) = x\left(\int_0^1 \int_0^y f(t)\ dt\ dy\right) - \int_0^x \int_0^y f(t)\ dt\ dy.$$

2. Faire le calcul explicite dans le cas $f \equiv 1$.

Exercise 6 *Principe du maximum*

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = a, & u(1) = b, \end{cases}$$

où $c \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner la discrétisation par différences finies de ce problème. On note $h = 1/(N+1)$, $N \in \mathbb{N}$ et $x_j = jh$, $j = 0, .., N+1$. On appelle U_h la solution approchée, c-à-d $U_h = (u_1, ..., u_N)$ où u_j est l'inconnue discrète en x_j.

2. On suppose ici que $c = 0$ et $f \geqslant 0$. Montrer que $u_j \geqslant \min(a,b)$, pour tout $j = 1, .., N$.

Correction de l'exercice 6

1. Le schéma s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j), & j = 1, .., N \\ u_0 = a, & u_{N+1} = b. \end{cases}$$

2. Choisissons $0 \leqslant j_0 \leqslant N+1$ tel que

$$j_0 = \min\left\{0 \leqslant j \leqslant N+1 \ \text{ t.q. } \ u_j = \min_{0\leqslant k\leqslant N+1} u_k\right\}.$$

Nous avons donc

$$u_j \geqslant u_{j_0}, \quad \forall 0 \leqslant j \leqslant N+1.$$

et même

$$u_j > u_{j_0}, \quad \forall 0 \leqslant j < j_0.$$

Nous allons montrer que $j_0 = 0$ ou $j_0 = N+1$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Nous avons alors

$$\frac{2u_{j_0} - u_{j_0-1} - u_{j_0+1}}{h^2} = f(x_{j_0})$$

Nous pouvons réécrire cela

$$\frac{1}{h^2}\underbrace{(u_{j_0} - u_{j_0-1})}_{<0} + \frac{1}{h^2}\underbrace{(u_{j_0} - u_{j_0+1})}_{\leqslant 0} = f(x_{j_0}) \geqslant 0.$$

Ceci est impossible. Donc $j_0 = 0$ ou $N+1$. Ainsi

$$u_{j_0} \geqslant \min(u_0, u_{N+1}) = \min(a, b).$$

■

Exercise 7 *Diffusion réaction*

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = x, \quad x \in [0,1], \\ u(0) = 1, \quad u'(1) + u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. On pose $h = 1/(N+1)$, $N \in \mathbb{N}$. On note $u_0, ..., u_{N+1}$ les inconnues censées approcher u aux points $x_0, ..., x_{N+1}$ (avec $x_j = jh,\ j = 0, .., N+1$). Ecrire une discrétisation de (1) par différences finies.

2. Ecrire le système linéaire obtenu sous forme matricielle $MU = F$ avec $U = \left(u_1, ..., u_{N+1}\right)$.

3. Montrer que, pour $V = (v_1, ..., v_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $W = (w_1, ..., w_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1}$, on a

$$MV \cdot W = \frac{1}{h^2}\sum_{j=0}^{N}\left(v_{j+1} - v_j\right)\left(w_{j+1} - w_j\right) + 2\sum_{j=1}^{N} v_j w_j + \frac{1}{h} v_{N+1} w_{N+1},$$

avec la convention $v_0 = 0$ et $w_0 = 0$. En déduire que M est inversible.

Correction de l'exercice 7

1. Le schéma s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + 2u_j = x_j, \quad j = 1, .., N \\ u_0 = 1, \quad \dfrac{u_{N+1} - u_N}{h} + u_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Il est préférable de ré-écrire la dernière équation

$$\frac{u_{N+1} - u_N}{h^2} + \frac{u_{N+1}}{h} = 0,$$

pour avoir le même coefficient que dans le terme de diffusion. 2. La forme matricielle est $MU = F$ avec

$$M = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2+2h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2+2h^2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & (1+h) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} x_1 + 1/h^2 \\ \vdots \\ x_N \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N+1} \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned}
MV\cdot W &= \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{h}\Big(\frac{v_j-v_{j-1}}{h}-\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)w_j+\frac{1}{h^2}\big(v_{N+1}-v_N\big)w_{N+1}+2\sum_{j=1}^{N}v_jw_j+\frac{1}{h}v_{N+1}w_{N+1}\\
&=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{h}\Big(\frac{v_j-v_{j-1}}{h}\Big)w_j-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{h}\Big(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)w_j\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{h^2}\big(v_{N+1}-v_N\big)w_{N+1}+2\sum_{j=1}^{N}v_jw_j+\frac{1}{h}v_{N+1}w_{N+1}\\
&=\sum_{j=0}^{N+1}\frac{1}{h}\Big(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)w_{j+1}-\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{h}\Big(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)w_j\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{h^2}\big(v_{N+1}-v_N\big)w_{N+1}+2\sum_{j=1}^{N}v_jw_j+\frac{1}{h}v_{N+1}w_{N+1}\\
&=\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{h}\Big(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)w_{j+1}-\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{h}\Big(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)w_j-\frac{1}{h}\Big(\frac{v_{N+1}-v_N}{h}\Big)w_N\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{h^2}\big(v_{N+1}-v_N\big)w_{N+1}+2\sum_{j=1}^{N}v_jw_j+\frac{1}{h}v_{N+1}w_{N+1}\\
&=\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)\Big(\frac{w_{j+1}-w_j}{h}\Big)+\Big(\frac{v_{N+1}-v_N}{h}\Big)\Big(\frac{w_{N+1}-w_N}{h}\Big)\\
&\qquad\qquad+2\sum_{j=1}^{N}v_jw_j+\frac{1}{h}v_{N+1}w_{N+1}\\
&=\sum_{j=0}^{N}\Big(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)\Big(\frac{w_{j+1}-w_j}{h}\Big)+2\sum_{j=1}^{N}v_jw_j+\frac{1}{h}v_{N+1}w_{N+1}.
\end{aligned}$$

Si $V=(v_1,...v_{N+1})$ tel que $MV=0$. Alors

$$0=MV\cdot V=\sum_{j=0}^{N}\Big(\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\Big)^2+2\sum_{j=1}^{N}v_j^2+\frac{1}{h}v_{N+1}^2.$$

C'est une somme de termes positifs. Ils sont donc tous nuls et $V=0$. La matrice M est inversible.

Rmq : le premier terme suffit. Il montre que $v_{j+1}=v_j$ pour $j=0,..,N$ avec la convention $v_0=0$.

■

Exercise 8 *Equation de transport-diffusion*

Soient $v\in C([0,1],\mathbb{R}_+)$ et a_0, $a_1\in\mathbb{R}$. Considérons l'équation suivante

$$\begin{cases} -u''(x)+v(x)u'(x)=0, & x\in[0,1],\\ u(0)=a_0, \quad u(1)=a_1. \end{cases} \tag{1}$$

On admettra qu'il existe une unique solution $u\in C([0,1],\mathbb{R})\cap C^2(]0,1[,\mathbb{R})$ à ce problème. On cherche a approcher cette solution par une méthode de différences finies. On se donne un pas de maillage $h = 1/(N+1)$, $N \in \mathbb{N}$. On note $x_j = jh$, $j = 0, .., N+1$ et u_1,..,u_N les inconnues discrètes censées approcher les valeurs $u(x_1)$,...,$u(x_N)$. On considère le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + \dfrac{1}{h} v(x_j)(u_j - u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, .., N \\ u_0 = a_0, \quad u_{N+1} = a_1. \end{cases}$$

1. Ecrire sous forme matricielle $MU = F$ le système ci-dessus avec $U = (u_1, ..., u_N)$. Les expressions de M et F sont à préciser.

2. Montrer que

(a) $MU \geqslant 0 \Longrightarrow U \geqslant 0$.

(b) M est inversible.

(c) Si U est solution de $MU = F$ alors $\min(a_0, a_1) \leqslant u_j \leqslant \max(a_0, a_1)$.

3. Montrer que M est une M-matrice.

Correction de l'exercice 8 1. La forme matricielle est

$$M = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{h}\begin{pmatrix} v(x_1) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -v(x_2) & v(x_2) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -v(x_{N-1}) & v(x_{N-1}) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -v(x_N) & v(x_N) \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \dfrac{a_0}{h^2} + \dfrac{1}{h} v(x_1) a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{a_1}{h^2} \end{pmatrix}$$

2(a). Remarquez que v est une fonction positive. Supposons U tel que $MU \geqslant 0$. Notons $u_0 = 0$ et $u_{N+1} = 0$, nous avons alors

$$(MU)_j = \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + \frac{1}{h} v(x_j)(u_j - u_{j-1}), \quad j = 1, .., N$$

Posons

$$j_0 = \min\left\{0 \leqslant j \leqslant N+1 \ \text{ t.q. } \ u_j = \min_{0 \leqslant k \leqslant N+1} u_k\right\}.$$

Si j_0 est différent de 0 et $N+1$ nous avons alors

$$\frac{2u_{j_0} - u_{i_0-1} - u_{j_0+1}}{h^2} + \frac{1}{h} v(x_{j_0})(u_{j_0} - u_{j_0-1}) \geqslant 0.$$

Nous pouvons réécrire cela

$$\Bigg(\underbrace{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}v(x_{j_0})}_{>0}\Bigg)\underbrace{(u_{j_0}-u_{j_0-1})}_{<0}+\frac{1}{h^2}\underbrace{(u_{j_0}-u_{j_0+1})}_{\leqslant 0}\geqslant 0.$$

C'est impossible. Donc $j_0=0$ ou $N+1$ et $u_{j_0}=0$. Il vient ainsi

$$U\geqslant 0.$$

2(b). Soit U tel que $MU=0$. Nous avons $MU\geqslant 0$ donc la question précédente s'applique et $U\geqslant 0$. Mais nous avons également $M(-U)\geqslant 0$ et donc $-U\geqslant 0$. Ainsi $U=0$ et la matrice est inversible.

2(c). Ils'agit du même raisonnement que précédemment. Supposons U tel que $MU=F$. Notons cette fois $u_0=a_0$ et $u_{N+1}=a_1$, nous avons alors

$$\frac{2u_j-u_{j-1}-u_{j+1}}{h^2}+\frac{1}{h}v(x_j)(u_j-u_{j-1})=0,\quad j=1,..,N$$

Posons

$$j_0=\min\left\{0\leqslant j\leqslant N+1\ \text{ t.q. }\ u_j=\min_{0\leqslant k\leqslant N+1}u_k\right\}.$$

Nous avons donc

$$u_j\geqslant u_{j_0},\quad \forall 0\leqslant j\leqslant N+1.$$

et même

$$u_j>u_{j_0},\quad \forall 0\leqslant j<j_0.$$

Mais si j_0 est différent de 0 et $N+1$ nous avons alors

$$\frac{2u_{j_0}-u_{j_0-1}-u_{j_0+1}}{h^2}+\frac{1}{h}v(x_{j_0})(u_{j_0}-u_{j_0-1})=0.$$

Nous pouvons réécrire cela

$$\Bigg(\underbrace{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}v(x_{j_0})}_{>0}\Bigg)\underbrace{(u_{j_0}-u_{j_0-1})}_{<0}+\frac{1}{h^2}\underbrace{(u_{j_0}-u_{j_0+1})}_{\leqslant 0}=0.$$

C'est impossible. Donc $j_0=0$ ou $N+1$ et $u_j\geqslant u_{j_0}\geqslant\min(a_0,a_1)$, $\forall 1\leqslant j\leqslant N$.

Posons maintenant

$$j_0=\min\left\{0\leqslant j\leqslant N+1\ \text{ t.q. }\ u_j=\max_{0\leqslant k\leqslant N+1}u_k\right\}.$$

Nous avons donc

$$u_j\leqslant u_{j_0},\quad \forall 0\leqslant j\leqslant N+1.$$

et même

$$u_j<u_{j_0},\quad \forall 0\leqslant j<j_0.$$

Mais si j_0 est différent de 0 et $N+1$ nous avons

$$\frac{2u_{j_0}-u_{i_0-1}-u_{j_0+1}}{h^2}+\frac{1}{h}v(x_{j_0})(u_{j_0}-u_{j_0-1})=0.$$

Nous pouvons réécrire cela

$$\underbrace{\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h}v(x_{j_0})\right)}_{>0}\underbrace{(u_{j_0}-u_{j_0-1})}_{>0}+\frac{1}{h^2}\underbrace{(u_{j_0}-u_{j_0+1})}_{\geqslant 0}=0.$$

C'est impossible. Donc $j_0=0$ ou $N+1$ et $u_j \leqslant u_{j_0} \leqslant \max(a_0,a_1)$, $\forall 1 \leqslant j \leqslant N$.

3. Les (a) et (b) sont triviaux en examinant la matrice. Le (c) a déjà été traité à la question 2. Pour le (d), il faut remarquer que si l'on note $e_j=(0,...,0,1,0,...,0)\in\mathbb{R}^N$ alors $C_j=M^{-1}e_j$ est un vecteur contenant la j-ème colonne de M^{-1}. Cependant $MC_j=e_j\geqslant 0$ donc en appliquant le résultat de la question 2(a) il vient $C_j\geqslant 0$. Ce qui signifie que tous les coefficients de la j-ème colonne de M^{-1} sont positifs.

■

Exercise 9 *Consistance*

Soient $f\in C^4(]0,1[)$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $c>0$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u + c\partial_x u = f(x), \quad x\in]0,1[,\\ u(0)=a,\\ u(1)=b.\end{cases}$$

On suppose que ce problème admet une solution unique $u\in C^4([0,1])$. Pour trouver une solution approchée, on considère le schéma suivant (avec N un entier strictement supérieur) :

$$\begin{cases} \dfrac{2u_j-u_{j-1}-u_{j+1}}{h^2}+c\dfrac{u_j-u_{j-1}}{h}=f(x_j),\ j=1,..,N,\\ u_0=a,\\ u_{N+1}=b,\end{cases}$$

avec $h=1/(N+1)$ et $x_j=jh$ avec $j=1,..,N$.

1. Ecrire le schéma sous forme matricielle.

2. Montrer que ce schéma est consistant. Quel est son ordre ?

3. Dans le cas où $c=0$ et f est une fonction constante, en déduire que

$$\max_{j=1,..,N}|u_j-u(x_j)|=0.$$

Correction de l'exercice 8

■